

Lemme (Borel-Cantelli): Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements.

- 1) Si $\sum P(A_n) < +\infty$, alors $P(A_n; i.o.) = 0$
- 2) Si les A_n sont 2-à-2 indépendants et $\sum P(A_n) = +\infty$, alors $P(A_n; i.o.) = 1$.

1) On a: $\{A_n; i.o.\} = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k$ et l'intersection est décroissante.

D'où $0 \leq P(A_n; i.o.) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bigcup_{k \geq n} A_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) = 0$ comme reste d'une série convergente.
↑ par σ-additivité

2) On a: $P(A_n; i.o.) = P(\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k^c) = 0 \Leftrightarrow \forall n \geq 0, P(\bigcap_{k \geq n} A_k^c) = 0$
↑ union dénombrable

Or, $\forall N \geq n, P(\bigcap_{k=n}^N A_k^c) = \prod_{k=n}^N P(A_k^c) = \prod_{k=n}^N (1 - P(A_k)) \leq \prod_{k=n}^N e^{-P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^N P(A_k)}$
(A_k) i.i.d. ⇒ (A_k^c) i.i.d. $\forall x, 1-x \leq e^{-x}$ par convexité de $x \mapsto e^{-x}$

D'où $0 \leq P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) = \lim_{N \rightarrow \infty} P(\bigcap_{k=n}^N A_k^c) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-\sum_{k=n}^N P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)} = 0$ car $\sum P(A_k) = +\infty$

Grobbine: Si $\forall \varepsilon > 0, \sum P(|X_n - X| > \varepsilon) < +\infty$, alors $X_n \xrightarrow{p.o.} X$.

Par Borel-Cantelli 1), $\forall \varepsilon > 0, P(|X_n - X| > \varepsilon; i.o.) = 0$.

Or, $\{X_n \not\rightarrow X\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{N \geq 0} \bigcup_{n \geq N} \{|X_n - X| > \varepsilon\} = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \{|X_n - X| > \varepsilon; i.o.\}$

D: immédiat
 C: si c'est vrai pour $\varepsilon > 0$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $\exists \gamma \in \mathbb{Q} \cap]0, \varepsilon[$ et le résultat est vrai pour $\gamma \in \mathbb{Q}_+^*$

D'où, $P(X_n \rightarrow X) = 1 \Leftrightarrow P(X_n \not\rightarrow X) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, P(|X_n - X| > \varepsilon; i.o.) = 0$
↑ union dénombrable

Application: Soit $(X_n)_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{B}(p)$ et $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

Alors $\bar{X}_n \xrightarrow{p.o.} p$.
 $\Leftrightarrow \bar{Z}_n \xrightarrow{p.o.} 0$

Notons $\bar{Z}_n = \bar{X}_n - p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$ où $Y_k = X_k - p$. Pour montrer que $\bar{X}_n \xrightarrow{p.o.} p$, il suffit de mg $\forall \varepsilon > 0, \sum P(|\bar{Z}_n| > \varepsilon) < +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. On a: $P(|\bar{Z}_n| > \varepsilon) = P(\bar{Z}_n^4 > \varepsilon^4) \leq \frac{E(\bar{Z}_n^4)}{\varepsilon^4}$ par l'inégalité de Markov.

Or, $\bar{Z}_n^4 = \frac{1}{n^4} \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq n} E(Y_i Y_j Y_k Y_l)$.

- Si $i \notin \{j, k, l\}$, alors par indépendance: $E(Y_i Y_j Y_k Y_l) = \underbrace{E(Y_i)}_{=0} E(Y_j Y_k Y_l) = 0$
- Si $i = j = k = l$, alors $E(Y_i^4) = (-p)^4 \times (1-p) + (1-p)^4 \times p =: \sigma^4$ qui ne dépend pas de i
- Si $i = j \neq k = l$, alors $E(Y_i^2 Y_k^2) = E(Y_i^2) E(Y_k^2) =: \sigma^4$

D'où, $E(\bar{Z}_n^4) = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n E(Y_i^4) + \frac{3}{n^4} \sum_{1 \leq i \neq k \leq n} E(Y_i^2) E(Y_k^2) = \frac{\sigma^4}{n^3} + \frac{3(n-1)}{n^3} \sigma^4 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
→ choix des 2 indices égaux

Ainsi, $P(|\bar{Z}_n| > \varepsilon) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison de séries à termes positifs, puisque $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$,
 $\sum P(|\bar{Z}_n| > \varepsilon) < +\infty$.